Урок № 86
Тема: Определённый интеграл.

Задание 1. Ознакомьтесь с теоретическим материалом по теме урока и законспектируйте его по плану:
1. Определённый интеграл: определение и свойства. Теорема Ньютона — Лейбница.
2. Применение определённого интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции.

Лекция.

1. Пусть функция F является первообразной для функции f на некотором промежутке D, а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Приращение $F(b)-F(a)$ любой из первообразных функций $F(x)+C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется определённым интегралом от a до b функции f и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Читается: «интеграл от a до b эф от икс де икс».

$f(x)dx-$ *подынтегральное выражение*

$f(x)-$ *подынтегральная функция*

$x-$ *переменная интегрирования*

a **-** нижний предел интегрирования , b - верхний — верхний предел интегрирования.

Таким образом, по определению, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ **(1)**

Равенство (1) называется формулой Ньютона — Лейбница.

Свойства определённого интеграла

1) Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла: $\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
2) Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов этих функций: $\int_a^b (f(x)+g(x)-h(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx-\int_a^b h(x)dx$
3) Если $a<c<b$, то $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$¿
4) Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a;b], где a < b, то $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$
5) Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то существует точка c, принадлежащая данному отрезку такая, что: $\int_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a)$

Правило вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

1) Найти неопределённый интеграл от функции $f(x)$, в котором принять C=0.
2) В полученном выражении подставить вместо x сначала верхний предел b , а затем нижний предел a и из результата первой подстановки вычесть результат второй.

Примеры.

Вычислить следующие определенные интегралы:

1. 1) $\int\limits_0^1 x\,dx$; 2) $\int\limits_2^3 x^2\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 (x^2+2x+1)\,dx$.

○ По формуле Ньютона — Лейбница получаем:

1) $\int\limits_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2-0^2) = \frac{1}{2}$;

2) $\int\limits_2^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3-2^3) = \frac{19}{3}$;

3) $\int\limits_{-1}^2 (x^2+2x+1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^2 = \left[\frac{1}{3}\cdot 2^3+2^2+2\right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3+\right.$
$\left.+(-1)^2+(-1)\right] = 9.$ ●

4) $\int\limits_1^2 x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1}\int\limits_1^2 ¿ = \frac{x^4}{4}\int\limits_1^2 ¿ = \frac{2^4-1^4}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

2. <u>Геометрический смысл определённого интеграла</u>: определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$, т. е. $S=\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

2. Вычисление площади плоской фигуры. Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) \geqslant 0$ (рис. 68).

Так как дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, т. е. $dS=f(x)\,dx$, то, интегрируя это равенство в пределах от a до b, получим

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (13.1)$$

Если криволинейная трапеция прилегает к оси Oy так, что $c \leqslant y \leqslant d$, $x=\varphi(y) \geqslant 0$ (рис. 69), то дифференциал переменной площади S равен $dS=f(y)\,dy$, откуда

$$S=\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy. \qquad (13.2)$$

В том случае, когда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, лежит под осью Ox (рис. 70), площадь находится по формуле

$$S=\int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (13.3)$$

Если фигура, ограниченная кривой $f(y)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, расположена по обе стороны от оси Ox (рис. 71), то

$$S=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (13.4)$$

Пусть, наконец, фигура S ограничена двумя пересекающимися кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a \leqslant x \leqslant b$ и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ (рис. 72). Тогда ее площадь находится по формуле

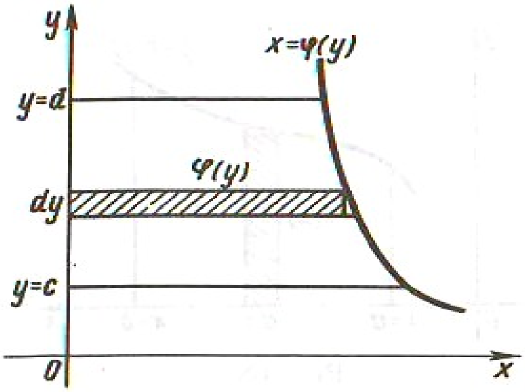

Рис. 69

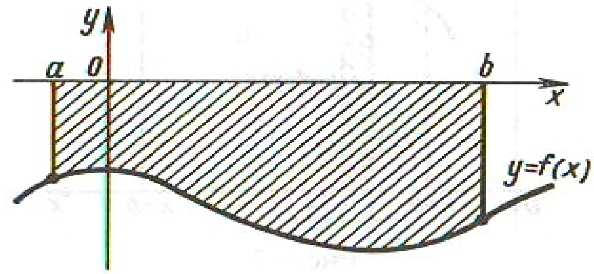

Рис. 70

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \qquad (13.5)$$

Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1. $x+2y-4=0$, $y=0$, $x=-3$ и $x=2$.

○ Выполним построение фигуры. Строим прямую $x+2y-4=0$ по двум точкам $A(4;\,0)$ и $B(0;\,2)$ (рис. 73). Выразив y через x, получим $y=-0{,}5x+2$. По формуле (13.1), где $f(x)=-0{,}5x+2$, $a=-3$, $b=2$, находим

$$S=\int_{-3}^{2}(-0{,}5x+2)\,dx=[-0{,}25x^2+2x]_{-3}^{2}=11{,}25 \text{ (кв. ед.)}$$

В качестве проверки вычислим площадь трапеции M_1MNN_1 обычным путем. Находим: $M_1M=f(-3)=-0{,}5(-3)+2=3{,}5$, $N_1N=f(2)=-0{,}5\cdot 2+2=$ $=1$, $M_1N_1=5$. Следовательно, $S=0{,}5(3{,}5+1)\cdot 5=11{,}25$ (кв. ед.). ●

2. $x-2y+4=0$, $x+y-5=0$ и $y=0$.

○ Выполним построение фигуры (рис. 74). Построим прямую $x-2y+$ $+4=0$: $y=0$, $x=-4$, $A(-4;\,0)$; $x=0$, $y=2$, $B(0;\,2)$. Построим прямую $x+y-5=0$: $y=0$, $x=5$, $C(5;\,0)$; $x=0$, $y=5$, $D(0;\,5)$.

Найдем точку пересечения прямых, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+4=0, \\ x+y-5=0, \end{cases} x=2,\ y=3,\ M(2;\,3).$$

Для вычисления искомой площади разобьем треугольник AMC на два треугольника AMN и NMC, так как при изменении x от A до N площадь

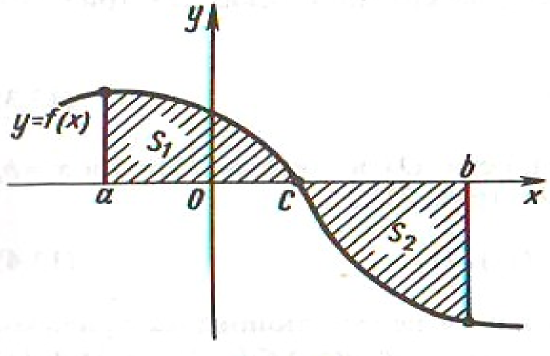

Рис. 71

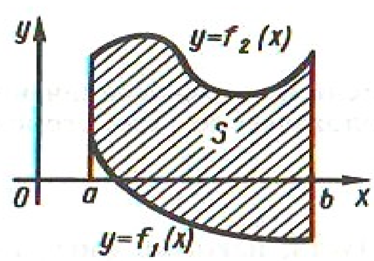

Рис. 72

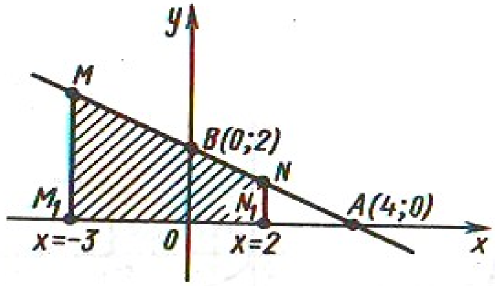

Рис. 73

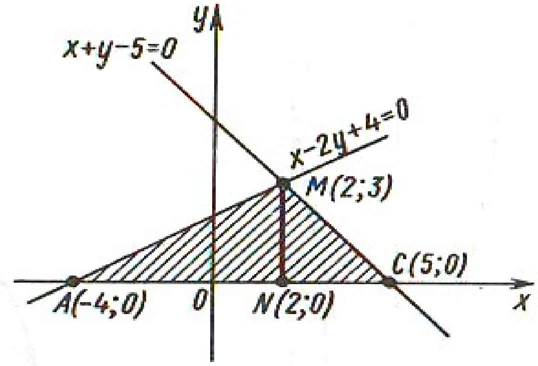

Рис. 74

ограничена прямой $x-2y+4=0$, а при изменении x от N до C — прямой $x+y-5=0$.

Для треугольника AMN имеем: $x-2y+4=0$; $y=0{,}5x+2$, т. е. $f(x)=$ $=0{,}5x+2$, $a=-4$ и $b=2$. Для треугольника NMC имеем: $x+y-5=0$, $y=-x+5$, т. е. $f(x)=-x+5$, $a=2$ и $b=5$.

Вычислив площадь каждого из треугольников и сложив результаты, находим:

$$S_{\Delta AMN}=\int\limits_{-4}^{2}(0{,}5x+2)\,dx=\left[0{,}25x^2+2x\right]_{-4}^{2}=9 \text{ (кв. ед.)};$$

$$S_{\Delta NMC}=\int\limits_{2}^{5}(-x+5)\,dx=\left[-0{,}5x^2+5x\right]_{2}^{5}=4{,}5 \text{ (кв. ед.)};$$

$$S=S_{\Delta AMN}+S_{\Delta NMC}=9+4{,}5=13{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Проверка: $S_{\Delta AMC}=0{,}5AC\cdot NM=0{,}5\cdot 9\cdot 3=13{,}5$ (кв. ед.). ●

3. $y=x^2$, $y=0$, $x=2$ и $x=3$.

○ В данном случае требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=x^2$, прямыми $x=2$ и $x=3$ и осью Ox (рис. 75). По формуле (13.1) находим

$$S=\int\limits_{2}^{3}x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{2}^{3}=6\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}. \quad ●$$

4. $y=-x^2+4$ и $y=0$.

○ Выполним построение фигуры (рис. 76). Искомая площадь заключена между параболой $y=-x^2+4$ и осью Ox.

Найдем точки пересечения параболы с осью Ox. Полагая $y=0$, найдем $x=\pm 2$. Так как данная фигура симметрична относительно оси Oy, то вычислим площадь фигуры, расположенной справа от оси Oy, и полученный результат удвоим:

$$S_1=\int\limits_{0}^{2}(-x^2+4)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{0}^{2}=5\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)};$$

$$S=2S_1=2\cdot 5\frac{1}{3}=10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}. \quad ●$$

Задание 2. Вычислите определённые интегралы.

1) $\int_0^2 x^2\,dx$

2) $\int_1^3 x^4\,dx$

3) $\int_2^3 (4x^2-4x-1)\,dx$

4) $\int_{-1}^0 (x^3+2x)\,dx$

5) $\int_{-2}^3 (4x^3-3x^2+2x+1)\,dx$

Выполненное Задание 2 отправляется на проверку преподавателю Кузнецовой Л.В. на адрес: ludmilakuz30@gmail.com