

Урок № 64

Тема: Определённый интеграл.

Задание 1. Ознакомьтесь с теоретическим материалом по теме урока и законспектируйте его по плану:

1. Определённый интеграл: определение и свойства. Теорема Ньютона — Лейбница.
2. Применение определённого интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции.

Лекция.

1. Пусть функция F является первообразной для функции f на некотором промежутке D , а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется определённым интегралом от a до b функции f и обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Читается: «интеграл от a до b эф от икс де икс».

$f(x) dx$ — подынтегральное выражение

$f(x)$ — подынтегральная функция

x — переменная интегрирования

a — нижний предел интегрирования, b — верхний — верхний предел интегрирования.

Таким образом, по определению, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ (1)

Равенство (1) называется формулой Ньютона — Лейбница.

Свойства определённого интеграла

1) Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла: $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

2) Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов этих функций: $\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx - \int_a^b h(x) dx$

3) Если $a < c < b$, то $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

4) Если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, где $a < b$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

5) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка c , принадлежащая данному отрезку такая, что: $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$

Правило вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

- 1) Найти неопределённый интеграл от функции $f(x)$, в котором принять $C=0$.
- 2) В полученном выражении подставить вместо x сначала верхний предел b , а затем нижний предел a и из результата первой подстановки вычесть результат второй.

Примеры.

Вычислить следующие определенные интегралы:

$$1. 1) \int_0^1 x dx; 2) \int_2^3 x^2 dx; 3) \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx.$$

○ По формуле Ньютона — Лейбница получаем:

$$1) \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2};$$

$$2) \int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3};$$

$$3) \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^2 = \left[\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) \right] = 9. \bullet$$

$$4) \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} \Big|_1^2 = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4 - 1^4}{4} = \frac{16 - 1}{4} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

2. Геометрический смысл определённого интеграла: определённый интеграл $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$, т. е. $S = \int_a^b f(x) dx$.

2. Вычисление площади плоской фигуры. Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a \leq x \leq b$, $f(x) \geq 0$ (рис. 68).

Так как дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, т. е. $dS=f(x) dx$, то, интегрируя это равенство в пределах от a до b , получим

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (13.1)$$

Если криволинейная трапеция прилегает к оси Oy так, что $c \leq y \leq d$, $x=\varphi(y) \geq 0$ (рис. 69), то дифференциал переменной площади S равен $dS=f(y) dy$, откуда

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy. \quad (13.2)$$

В том случае, когда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, лежит под осью Ox (рис. 70), площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (13.3)$$

Если фигура, ограниченная кривой $f(y)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, расположена по обе стороны от оси Ox (рис. 71), то

$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_a^b |f(x)| dx. \quad (13.4)$$

Пусть, наконец, фигура S ограничена двумя пересекающимися кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a \leq x \leq b$ и $f_1(x) \leq f_2(x)$ (рис. 72). Тогда ее площадь находится по формуле

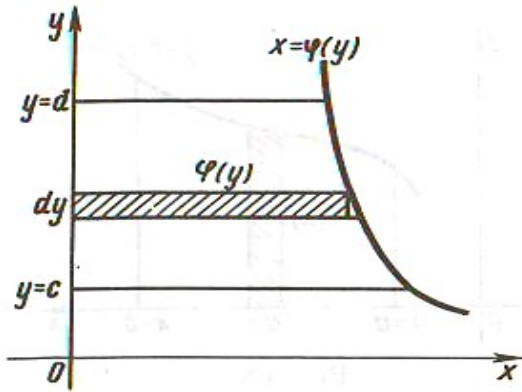


Рис. 69

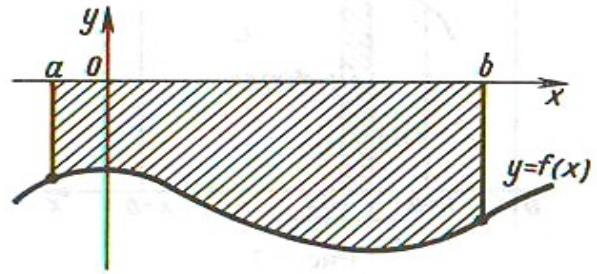


Рис. 70

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (13.5)$$

Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1. $x + 2y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = -3$ и $x = 2$.

○ Выполним построение фигуры. Строим прямую $x + 2y - 4 = 0$ по двум точкам $A(4; 0)$ и $B(0; 2)$ (рис. 73). Выразив y через x , получим $y = -0,5x + 2$. По формуле (13.1), где $f(x) = -0,5x + 2$, $a = -3$, $b = 2$, находим

$$S = \int_{-3}^2 (-0,5x + 2) dx = [-0,25x^2 + 2x]_{-3}^2 = 11,25 \text{ (кв. ед.)}$$

В качестве проверки вычислим площадь трапеции M_1MNN_1 обычным путем. Находим: $M_1M = f(-3) = -0,5(-3) + 2 = 3,5$, $N_1N = f(2) = -0,5 \cdot 2 + 2 = 1$, $M_1N_1 = 5$. Следовательно, $S = 0,5(3,5 + 1) \cdot 5 = 11,25$ (кв. ед.). ●

2. $x - 2y + 4 = 0$, $x + y - 5 = 0$ и $y = 0$.

○ Выполним построение фигуры (рис. 74). Построим прямую $x - 2y + 4 = 0$: $y = 0$, $x = -4$, $A(-4; 0)$; $x = 0$, $y = 2$, $B(0; 2)$. Построим прямую $x + y - 5 = 0$: $y = 0$, $x = 5$, $C(5; 0)$; $x = 0$, $y = 5$, $D(0; 5)$.

Найдем точку пересечения прямых, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0, \\ x + y - 5 = 0, \end{cases} \quad x = 2, \quad y = 3, \quad M(2; 3).$$

Для вычисления искомой площади разобьем треугольник AMC на два треугольника AMN и NMC , так как при изменении x от A до N площадь

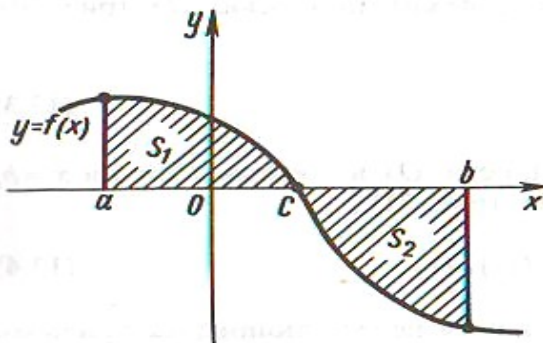


Рис. 71

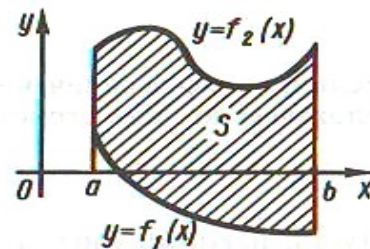


Рис. 72

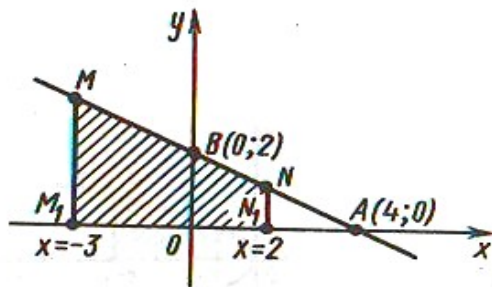


Рис. 73

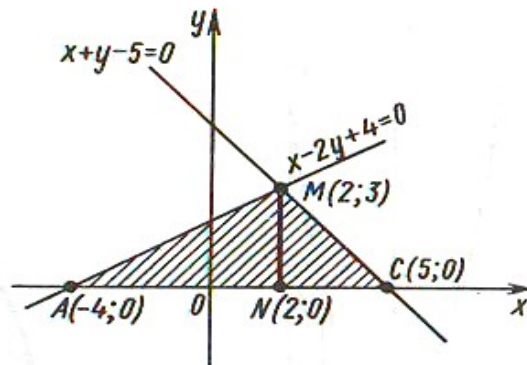


Рис. 74

ограничена прямой $x - 2y + 4 = 0$, а при изменении x от N до C — прямой $x + y - 5 = 0$.

Для треугольника AMN имеем: $x - 2y + 4 = 0$; $y = 0,5x + 2$, т. е. $f(x) = 0,5x + 2$, $a = -4$ и $b = 2$. Для треугольника NMC имеем: $x + y - 5 = 0$, $y = -x + 5$, т. е. $f(x) = -x + 5$, $a = 2$ и $b = 5$.

Вычислив площадь каждого из треугольников и сложив результаты, находим:

$$S_{\Delta AMN} = \int_{-4}^2 (0,5x + 2) dx = [0,25x^2 + 2x]_{-4}^2 = 9 \text{ (кв. ед.)};$$

$$S_{\Delta NMC} = \int_2^5 (-x + 5) dx = [-0,5x^2 + 5x]_2^5 = 4,5 \text{ (кв. ед.)};$$

$$S = S_{\Delta AMN} + S_{\Delta NMC} = 9 + 4,5 = 13,5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Проверка: $S_{\Delta AMC} = 0,5AC \cdot NM = 0,5 \cdot 9 \cdot 3 = 13,5$ (кв. ед.). ●

3. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$ и $x = 3$.

○ В данном случае требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = 2$ и $x = 3$ и осью Ox (рис. 75). По формуле (13.1) находим

$$S = \int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = 6\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}. \bullet$$

4. $y = -x^2 + 4$ и $y = 0$.

○ Выполним построение фигуры (рис. 76). Искомая площадь заключена между параболой $y = -x^2 + 4$ и осью Ox .

Найдем точки пересечения параболы с осью Ox . Полагая $y = 0$, найдем $x = \pm 2$. Так как данная фигура симметрична относительно оси Oy , то вычислим площадь фигуры, расположенной справа от оси Oy , и полученный результат удвоим:

$$S_1 = \int_0^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 = 5\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)};$$

$$S = 2S_1 = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}. \bullet$$

Задание 2. Вычислите определённые интегралы.

1) $\int_0^2 x^2 dx$

2) $\int_1^3 x^4 dx$

3) $\int_2^3 (4x^2 - 4x - 1) dx$

4) $\int_{-1}^0 (x^3 + 2x) dx$

5) $\int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx$

Выполненное Задание 2 отправляется на проверку преподавателю Кузнецовой Л.В. на адрес: ludmilakuz30@gmail.com