Урок № 58
Тема: Дискретная случайная величина, закон её распределения.

Задание 1. Ознакомьтесь с теоретическим материалом по теме урока и законспектируйте его по плану:
1. Дискретная случайная величина и закон её распределения.
2. Числовые характеристики дискретной случайной величины:
   1) математическое ожидание и его свойства;
   2) дисперсия и её свойства;
   3) среднее квадратическое отклонение.

Лекция

1. Наряду с понятием случайного события в теории вероятности используется и более удобное понятие случайной величины.
Определение. ***Случайной величиной*** **называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.**
Будем обозначать случайные величины заглавными буквами латинского алфавита (X, Y,Z, …), а их возможные значения – соответствующими малыми буквами (x_i, y_i, …).
Примеры: число очков, выпавших при броске игральной кости; число появлений герба при 10 бросках монеты; число выстрелов до первого попадания в цель; расстояние от центра мишени до пробоины при попадании.
Можно заметить, что множество возможных значений для перечисленных случайных величин имеет разный вид: для первых двух величин оно конечно (соответственно 6 и 11 значений), для третьей величины множество значений бесконечно и представляет собой множество натуральных чисел, а для четвертой – все точки отрезка, длина которого равна радиусу мишени. Таким образом, для первых трех величин множество значений из отдельных (дискретных), изолированных друг от друга значений, а для четвертой оно представляет собой непрерывную область. По этому показателю случайные величины подразделяются на две группы: дискретные и непрерывные.
Определение. **Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.**
Определение. **Случайная величина называется *непрерывной*, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.**
Определение. **Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая. В противном случае случайные величины *зависимы*.**

Дискретные случайные величины.

Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется законом распределения случайной величины. Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется рядом распределения:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

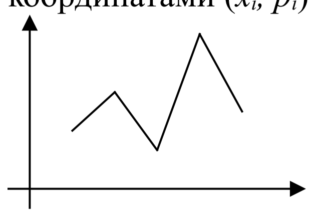
Заметим, что событие, заключающееся в том, что случайная величина примет одно из своих возможных значений, является достоверным, поэтому $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1.$

<u>Пример.</u> Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Составить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий после двух выстрелов.

Решение. Очевидно, что X может принимать три значения: 0, 1 и 2. Их вероятности найдены в примере, рассмотренном в лекции 3. Следовательно, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде многоугольника распределения – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами (x_i, p_i).



2. Рассмотрим основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

1) ***Математическим ожиданием*** **дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:**

$$\boldsymbol{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n\,.} \qquad \textbf{(1)}$$

<u>Пример 1</u>. Пусть дан закон распределения независимой величины X:

X	10	20	30
P	0,2	0,4	0,4

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X.

Решение: Воспользуемся формулой (1): $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$.

В нашем примере (берём данные из таблицы):

$x_1=10, x_2=20, x_3=30, p_1=0{,}2, p_2=0{,}4, p_3=0{,}4$

Подставляем выписанные данные из таблицы в формулу и производим вычисления:

$M(X)=10\cdot 0{,}2+20\cdot 0{,}4+30\cdot 0{,}4=2+8+12=22$

Ответ: $M(X)=22$

<u>Свойства математического ожидания.</u>

1) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной: $M(C) = C$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C\,M(X).$$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин (зависимых или независимых) равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

2) ***Дисперсией (рассеянием)*** **случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:** $\boldsymbol{D(X) = M(X^2) - M^2(X)}$ **(2)**

<u>Пример 2.</u> Пусть дан закон распределения независимой величины X

X	2	3	4
P	0,1	0,4	0,5

Найти математическое дисперсию дискретной случайной величины X.

Решение:

Найдём дисперсию по формуле (2): $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

1) Для этого сначала найдём математическое ожидание по формуле (1): $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$.

В нашем примере (берём данные из таблицы): $x_1=2, x_2=3, x_3=4, p_1=0,1, p_2=0,4, p_3=0,5$

Подставляем выписанные данные из таблицы в формулу и производим вычисления:

$M(X)=2\cdot 0,1+3\cdot 0,4+4\cdot 0,5=0,2+1,2+2=3,4$

Сразу найдём $M^2(X)$. Для этого найденное значение $M(X)=3,4$ возведём в квадрат, т. е. $M^2(X)=3,4^2=11,56$

2) Находим $M^2(X)$ по формуле: $M^2(X) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_n^2p_n$

$M(X^2)=$ $2^2\cdot 0,1+3^2\cdot 0,4+4^2\cdot 0,5=4\cdot 0,1+9\cdot 0,4+16\cdot 0,5=0,4+3,6+8=12$

Найдём дисперсию по формуле (2): $D(X) = M(X^2) - M^2(X) =$ $12-11,56=0,44$

Ответ: $D(X)=0,44$

<u>Свойства дисперсии.</u>

1) Дисперсия постоянной величины C равна нулю: $D(C) = 0$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2D(X).$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

3) ***Средним квадратическим отклонением*** **σ случайной величины** ***X*** **называется квадратный корень из дисперсии:** $\sigma=\sqrt{D(X)}$ **(3)**

<u>Пример 3.</u> Найдём дисперсию из примера 2 по формуле (3): $\sigma=\sqrt{D(X)}$

$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,44}\approx 0,66$

Ответ: 0,66

Задание 2. Найдите числовые характеристики дискретной случайной величины (математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение, заданной закон распределения:

1)

X	5	10
P	0,2	0,8

2)

X	30	40	60
P	0,5	0,2	0,3

3)

X	2	4	6	8
P	0,4	0,2	0,1	0,3

Выполненное Задание 2 отправляется на проверку преподавателю Кузнецовой Л.В. на адрес: ludmilakuz30@gmail.com