

Урок № 85

Тема: Первообразная и интеграл.

Задание 1. Ознакомьтесь с теоретическим материалом по теме урока и законспектируйте его по плану:

1. Первообразная.
2. Неопределённый интеграл: определение и свойства.
3. Таблица неопределённых интегралов.

Лекция.

1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $y=f(x)$ на заданном промежутке X , если для всех $x \in X$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$

Можно прочесть двумя способами: f производная функции F ; F первообразная для функции f

Свойство первообразных. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на заданном промежутке, то функция $f(x)$ имеет бесконечно много первообразных, и все эти первообразные можно записать в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Геометрическая интерпретация. Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси Oy .

Правила вычисления первообразных

- 1) Первообразная суммы равна сумме первообразных. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первообразная для $f(x) + g(x)$.
- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак производной. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, и k — постоянная, то $k \cdot F(x)$ — первообразная для $k \cdot f(x)$.
- 3) Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, и k, b — постоянные, причём $k \neq 0$, то $1/k \cdot F(kx + b)$ — первообразная для $f(kx + b)$.

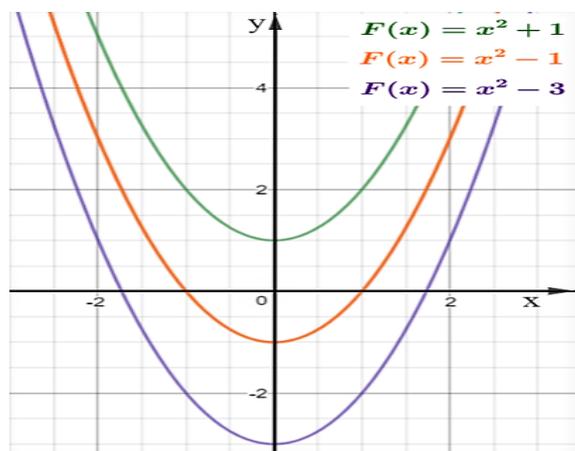
Пример. Любая функция $F(x) = x^2 + C$, где C — произвольная постоянная, и только такая функция, является первообразной для функции $f(x) = 2x$.

Например:

$$F'(x) = (x^2 + 1)' = 2x = f(x);$$

$$f(x) = 2x, \text{ т.к. } F'(x) = (x^2 - 1)' = 2x = f(x);$$

$$f(x) = 2x, \text{ т.к. } F'(x) = (x^2 - 3)' = 2x = f(x)$$



Связь между графиками функции и ее первообразной:

- 1) Если график функции $f(x) > 0$ на промежутке, то график ее первообразной $F(x)$ возрастает на этом промежутке.

- 2) Если график функции $f(x) < 0$ на промежутке, то график ее первообразной $F(x)$ убывает на этом промежутке.
- 3) Если $f(x) = 0$, то график ее первообразной $F(x)$ в этой точке меняется с возрастающего на убывающий (или наоборот).

Для обозначения первообразной используют знак неопределённого интеграла, то есть интеграла без указания пределов интегрирования.

2. Множество всех первообразных $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом и обозначается символом $\int f(x) dx$.

Обозначается неопределённый интеграл так: $\int f(x) dx = F(x) + C =$,

где $f(x)$ — подынтегральная функция

$f(x) dx$ — подынтегральное выражение

x — переменная интегрирования

$F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$

C — произвольная постоянная.

Интегрирование — это восстановление функции по её производной (обратное действие по отношению к дифференцированию).

Свойства неопределённого интеграла

- 1) Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $(\int f(x) dx)' = f(x)$.
- 2) Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла: $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$.
- 3) Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций: $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3. Таблица неопределённых интегралов.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, C = const$ — Важная формула!!!

2. $\int dx = x + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

7. $\int e^x dx = e^x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

10. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$

11. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$

Примеры.

1) $\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$

2) $\int 3x^{-4} dx = 3 \int x^{-4} dx = \frac{3x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{3x^{-3}}{-3} + C = x^{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C$

$$3) \int (x^4 - 4x^2 + 5x - 2) dx = \int x^4 dx - 4 \int x^2 dx + 5 \int x dx - 2 \int dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{4x^{2+1}}{2+1} + \frac{5x^{1+1}}{1+1} -$$

$$2x + C = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 2x + C$$

$$4) \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$5) \int \frac{5dx}{\cos^2 x} = 5 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 5 \operatorname{tg} x + C$$

Задание 2. Найдите неопределённые интегралы.

1) $\int x^4 dx$

2) $\int 5x^9 dx$

3) $\int x^{-10} dx$

4) $\int -8t^3 dt$

5) $\int (x^5 - 1) dx$

6) $\int (4u^3 - 6u^2 - 4u + 3) du$

7) $\int \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x + 5 \right) dx$

Задание 3. Выучить первые 9 формул Таблицы неопределённых интегралов.

Выполненное Задание 2 отправляется на проверку преподавателю Кузнецовой Л.В. на адрес: ludmilakuz30@gmail.com