Урок № 63
Тема: Первообразная и интеграл.

Задание 1. Ознакомьтесь с теоретическим материалом по теме урока и законспектируйте его по плану:
1. Первообразная.
2. Неопределённый интеграл: определение и свойства.
3. Таблица неопределённых интегралов.

Лекция.

1. Функция *F (x)* называется *первообразной* для функции *y=f (x)* на заданном промежутке *X*, если для всех $x \in X$ выполняется равенство: *F′(x) = f (x)*

Можно прочесть двумя способами: ***f*** производная функции ***F; F*** первообразная для функции ***f***

Свойство первообразных. Если *F(x)* — первообразная для функции *f(x)* на заданном промежутке, то функция f(x) имеет бесконечно много первообразных, и все эти первообразные можно записать в виде *F(x) + C*, где С — произвольная постоянная.

Геометрическая интерпретация. Графики всех первообразных данной функции *f (x)* получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси О*y*.

Правила вычисления первообразных

1) Первообразная суммы равна сумме первообразных. Если *F(x)* — первообразная для *f(x)*, а G(x) — первообразная для *g(x)*, то *F(x) + G(x)* — первообразная для *f(x) + g(x)*.
2) Постоянный множитель можно выносить за знак производной. Если *F(x)* — первообразная для *f(x)*, и *k* — постоянная, то *k·F(x)* — первообразная для *k·f(x)*.
3) Если *F(x)* — первообразная для *f(x)*, и *k, b* — постоянные, причём $k \neq 0$, то $1/k \cdot F(kx + b)$ — первообразная для *f(kx + b)*.

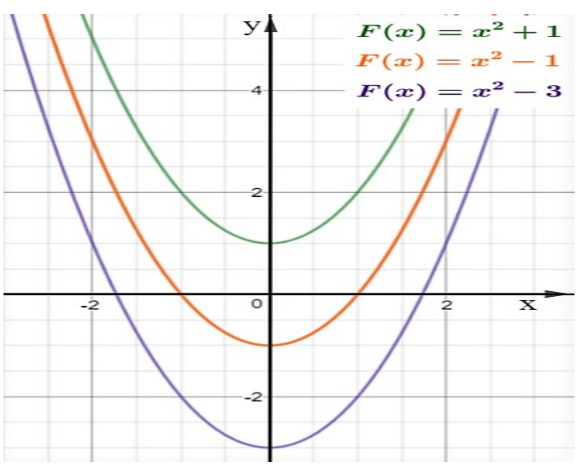
Пример. Любая функция $F(x) = x^2 + C$, где С — произвольная постоянная, и только такая функция, является первообразной для функции $f(x) = 2x$.

Например:

$F'(x) = (x^2 + 1)' = 2x = f(x);$

$f(x) = 2x$, т.к. $F'(x) = (x^2 - 1)' = 2x = f(x);$

$f(x) = 2x$, т.к. $F'(x) = (x^2 - 3)' = 2x = f(x)$



Связь между графиками функции и ее первообразной:

1) Если график функции *f(x)>0* на промежутке, то график ее первообразной *F(x)* возрастает на этом промежутке.
2) Если график функции *f(x)<0* на промежутке, то график ее первообразной *F(x)* убывает на этом промежутке.
3) Если *f(x)=0*, то график ее первообразной *F(x)* в этой точке меняется с возрастающего на убывающий (или наоборот).

Для обозначения первообразной используют знак неопределённого интеграла, то есть интеграла без указания пределов интегрирования.

2. Множество всех первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Обозначается неопределённый интеграл так: $\int f(x)dx=F(x)+C=$,

где *f(x)* — подынтегральная функция

f(x) dx — подынтегральное выражение

x — переменная интегрирования

F(x) — одна из первообразных функции f(x)

C — произвольная постоянная.

Интегрирование – это восстановление функции по её производной (обратное действие по отношению к дифференцированию).

Свойства неопределённого интеграла

1) Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $(\int f(x)dx)'=f(x)$.
2) Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла: $\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx$.
3) Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций: $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

3. Таблица неопределённых интегралов.

1. $\int x^{\alpha}\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, C=const$ **– Важная формула!!!**

2. $\int dx=x+C$

3. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

4. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

5. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

6. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

7. $\int e^x\,dx=e^x+C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$

10. $\int tg\,x\,dx=-\ln|\cos x|+C$

11. $\int ctg\,x\,dx=\ln|\sin x|+C$

Примеры.

1) $\int x^2\,dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}+C=\frac{x^3}{3}+C$

2) $\int 3x^{-4}\,dx=3\int x^{-4}\,dx=\frac{3x^{-4+1}}{-4+1}+C=3\frac{x-¿^3}{-3}+C=x^{-3}+C=\frac{-1}{x^3}+C ¿$

3)
$\int\left(x^4-4x^2+5x-2\right)dx=\int x^4\,dx-4\int x^2\,dx+5\int x\,dx-2\int dx=¿\frac{x^{4+1}}{4+1}-\frac{4x^{2+1}}{2+1}+\frac{5x^{1+1}}{1+1}-2x+C=\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-2x+C$

4) $\int 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$

5) $\int\frac{5\,dx}{\cos^2 x}=5\int\frac{dx}{\cos^2 x}=5\,tgx+C$

Задание 2. Найдите неопределённые интегралы.

1) $\int x^4\,dx$
2) $\int 5x^9\,dx$
3) $\int x^{-10}\,dx$
4) $\int -8t^3\,dt$
5) $\int\left(x^5-1\right)dx$
6) $\int\left(4u^3-6u^2-4u+3\right)du$
7) $\int\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+x+5\right)dx$

Задание 3. Выучить первые 9 формул Таблицы неопределённых интегралов.

Выполненное Задание 2 отправляется на проверку преподавателю Кузнецовой Л.В. на адрес: ludmilakuz30@gmail.com