# <u>Урок № 57</u>
# <u>Тема: Событие, вероятность события.</u>

**Задание 1.** Ознакомьтесь с теоретическим материалом по теме урока и законспектируйте его по плану:
1. Предмет теории вероятностей.
2. Случайные события. Алгебра событий.
3. Определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Основные формулы комбинаторики.

## <u>Лекция</u>

**1.** В различных разделах науки и техники нередко возникают ситуации, когда результат каждого из многих проводимых опытов заранее предугадать невозможно, однако можно исследовать закономерности, возникающие при проведении серии опытов. Нельзя, например, точно сказать, какая сторона монеты окажется сверху при данном броске: герб или цифра – но при большом количестве бросков число выпадений герба приближается к половине количества бросков; нельзя заранее предсказать результат одного выстрела из данного орудия по данной цели, но при большом числе выстрелов частота попадания приближается к некоторому постоянному числу. Исследование вероятностных закономерностей массовых однородных явлений составляет предмет *теории вероятностей*.

**Теория вероятности — математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.** Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей случайных массовых явлений. однородных
Методы, открытые в теории вероятностей, получили свое продолжение в большинстве современных наук и отраслях деятельности человека.
Например: 1) Дождь идет в течении трех дней. Можно ли быть уверенным, что он прекратится на четвертые сутки. 2) После 10 испытаний некоторого прибора можно ли быть уверенным, что он не сломается на следующем испытании?

**2.** Основным понятием классической теории вероятностей является *случайное событие*. События, которые могут произойти в результате опыта, можно подразделить на три вида:
а) ***достоверное событие*** – событие, которое всегда происходит при проведении опыта;
б) ***невозможное событие*** – событие, которое в результате опыта произойти не может;
в) ***случайное событие*** – событие, которое может либо произойти, либо не произойти.

Например, при броске игральной кости достоверным событием является выпадение числа очков, не превышающего 6, невозможным – выпадение 10 очков, а случайным – выпадение 3 очков.

### Алгебра событий.

<u>Определение 1.1.</u> **Суммой** $A+B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий A и B. **Суммой нескольких событий**, соответ-ственно, называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.
Пример 1. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Если событие A – попадание первого стрелка, а событие B – второго, то сумма A+B – это хотя бы одно попадание при двух выстрелах. Пример 2. Если при броске игральной кости событием $A_i$

назвать выпадение $i$ очков, то выпадение нечетного числа очков является суммой событий $A_1+A_2+A_3$.

Назовем все возможные результаты данного опыта его *исходами* и предположим, что множество этих исходов, при которых происходит событие А (исходов, *благоприятных* событию А), можно представить в виде некоторой области на плоскости. Тогда множество исходов, при которых произойдет событие А+В, является объединением множеств исходов, благоприятных событиям А или В.

Определение 1.2. **Произведением** $A \cdot B$ событий А и В называется событие, состоящее в том, что произошло и событие А, и событие В. Аналогично **произведением нескольких событий** называется событие, заключающееся в том, что произошли все эти события.

Пример 3. В примере 1 ( два выстрела по мишени) событием АВ будет попадание обоих стрелков. Пример 4. Если событие А состоит в том, что из колоды карт извлечена карта пиковой масти, а событие В – в том, что из колоды вынута дама, то событием АВ будет извлечение из колоды дамы пик.

Геометрической иллюстрацией множества исходов опыта, благоприятных появлению произведения событий А и В, является пересечение областей, соответствующих исходам, благоприятным А и В.

Определение 1.3. **Разностью** $A/B$ событий А и В называется событие, состоящее в том, что А произошло, а В – нет.

Пример 5. Вернемся к примеру 1, где А/ В – попадание первого стрелка при промахе второго. Пример 6. В примере 4 А/ – извлечение из колоды любой карты пиковой масти, кроме дамы. Наоборот, В /А – извлечение дамы любой масти, кроме пик.

Введем еще несколько категорий событий.

Определение 1.4. События А и В называются **совместными**, если они могут произойти оба в результате одного опыта. В противном случае (то есть если они не могут произойти одновременно) события называются **несовместными.**

Примеры: совместными событиями являются попадания двух стрелков в примере 1 и появление карты пиковой масти и дамы в примере 4; несовместными – события $A_1$ – $A_6$ в примере 2.

*Замечание 1.* Если изобразить графически области исходов опыта, благоприятных несовместным событиям, то они не будут иметь общих точек.

*Замечание 2.* Из определения несовместных событий следует, что их произведение является невозможным событием.

Определение 1.5. Говорят, что события $A_1, A_2,\ldots,A_n$ образуют **полную группу**, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из событий этой группы.

*Замечание.* В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате опыта произойдет *одно и только одно* из них. Такие события называют **элементарными событиями**.

Пример. В примере 2 события $A_1$ – $A_6$ (выпадение одного, двух,…, шести очков при одном броске игральной кости) образуют полную группу несовместных событий.

Определение 1.6. События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них является более возможным, чем другое.

Примеры: выпадение любого числа очков при броске игральной кости, появление любой карты при случайном извлечении из колоды, выпадение герба или цифры при броске монеты и т.п.

**3. Классическое определение вероятности.**

При изучении случайных событий возникает необходимость количественно сравнивать возможность их появления в результате опыта. Например, при последовательном извлечении из колоды пяти карт более возможна ситуация, когда появились карты разных мастей, чем появление пяти карт одной масти; при десяти бросках монеты более возможно чередование гербов и цифр, нежели выпадение подряд десяти гербов, и т.д. Поэтому с каждым таким событием связывают по определенному правилу некоторое число, которое тем больше, чем более возможно событие. Это число называется **вероятностью события** и является вторым основным понятием теории вероятностей. Отметим, что само понятие вероятности, как и понятие случайного события, является аксиоматическим и поэтому не поддается строгому определению. То, что в дальнейшем будет называться различными определениями вероятности, представляет собой способы вычисления этой величины.

<u>Определение 1.7.</u> Если все события, которые могут произойти в результате данного опыта, а) попарно несовместны; б) равновозможны; в) образуют полную группу, то говорят, что имеет место **схема случаев.**

Можно считать, что случаи представляют собой все множество исходов опыта. Пусть их число равно $n$ ( число возможных исходов), а при $m$ из них происходит некоторое событие А (число благоприятных исходов).

<u>Определение 1.8.</u> **Вероятностью события А называется отношение числа исходов $m$, благоприятных этому событию, к числу возможных исходов $n$ :**

$$p(A) = \frac{m}{n} \quad - \qquad (1.1)$$

**- классическое определение вероятности.**

<u>Свойства вероятности.</u>

<u>Свойство 1.</u> Вероятность достоверного события равна единице.

Доказательство. Так как достоверное событие всегда происходит в результате опыта, то все исходы этого опыта являются для него благоприятными, то есть $m = n$, следовательно, $P(A) = 1$.

<u>Свойство 2.</u> Вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство. Для невозможного события ни один исход опыта не является благоприятным, поэтому $m = 0$ и $P(A) = 0$.

<u>Свойство 3.</u> Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

Пример. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Будем считать элементарными событиями, или исходами опыта, извлечение из урны каждого из имеющихся в ней шаров. Очевидно, что эти события удовлетворяют всем условиям, позволяющим считать их схемой случаев. Следовательно, число возможных исходов равно 10, а число исходов, благоприятных событию А (появлению белого шара) – 6 (таково количество белых шаров в урне). Значит,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=0{,}6.$$

## Теорема сложения вероятностей.

**Теорема 1 (теорема сложения).** Вероятность $P(A+B)$ суммы событий $A$ и $B$ равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (2.2)$$

Следствие 1. Теорему 2.1 можно распространить на случай суммы любого числа событий. Например, для суммы трех событий $A$, $B$ и $C$

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \qquad (2.3)$$

и т.д.

Следствие 2. Если события $A$ и $B$ несовместны, то $m_{AB} = 0$, и, следовательно, вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (2.4)$$

Определение 2.1. **Противоположными событиями** называют два несовместных события, образующих полную группу. Если одно из них назвать $A$, то второе принято обозначать $\overline{A}$.

*Замечание.* Таким образом, $\overline{A}$ заключается в том, что событие $A$ не произошло.

**Теорема 2.** Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (2.5)$$

*Замечание.* В ряде задач проще искать не вероятность заданного события, а вероятность события, противоположного ему, а затем найти требуемую вероятность по формуле (2.5).

Пример. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров, случайным образом извлека-ются 5 шаров. Найти вероятность того, что вынуты шары разных цветов.

Решение. Событие $\overline{A}$, противоположное заданному, заключается в том, что из урны вынуто 5 шаров одного цвета, а так как белых шаров в ней всего два, то этот цвет может быть только черным. Множество возможных исходов опыта найдем по формуле (1.5):

$$n = C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56,$$

а множество исходов, благоприятных событию $\overline{A}$ - это число возможных наборов по 5 шаров только из шести черных:

$$m_{\overline{A}} = C_6^5 = 6.$$

Тогда $P(\bar{A})=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$, а $P(A)=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}$.

## Теорема умножения вероятностей.

Определение 2.2. **Условной вероятностью $P(B/A)$ события $B$** вероятность события $B$ при условии, что событие $A$ произошло.

*Замечание.* Понятие условной вероятности используется в основном в случаях, когда осуществление события $A$ изменяет вероятность события $B$.

Примеры:

1) пусть событие $A$ – извлечение из колоды в 32 карты туза, а событие $B$ – то, что и вторая вынутая из колоды карта окажется тузом. Тогда, если после первого раза карта была возвращена в колоду, то вероятность вынуть вторично туз не меняется: $P(B)=P(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}=0{,}125$. Если же первая карта в колоду не возвращается, то

осуществление события $A$ приводит к тому, что в колоде осталась 31 карта, из которых только 3 туза. Поэтому $P(B/A)=\frac{3}{31}\approx 0,097$.

2) если событие $A$ – попадание в самолет противника при первом выстреле из орудия, а $B$ – при втором, то первое попадание уменьшает маневренность самолета, поэтому $P(B/A)$ увеличится по сравнению с $P(A)$.

**<u>Теорема 3 (теорема умножения).</u>** Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{2.6}$$

Пример. Для поражения цели необходимо попасть в нее дважды. Вероятность первого попадания равна 0,2, затем она не меняется при промахах, но после первого попадания увеличивается вдвое. Найти вероятность того, что цель будет поражена первыми двумя выстрелами.

Решение. Пусть событие $A$ – попадание при первом выстреле, а событие $B$ – попадание при втором. Тогда $P(A) = 0,2$, $P(B/A) = 0,4$, $P(AB) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$.

*Следствие.* Если подобным образом вычислить вероятность события $BA$, совпадающего с событием $AB$, то получим, что $P(BA) = P(B) \cdot P(A/B)$. Следовательно,

$$P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \tag{2.7}$$

<u>Определение 2.3.</u> Событие $B$ называется **независимым** от события $A$, если появление события $A$ не изменяет вероятности $B$, то есть $p(B/A) = p(B)$.

*Замечание.* Если событие $B$ не зависит от $A$, то и $A$ не зависит от $B$. Действительно, из (2.7) следует при этом, что $p(A) \cdot p(B) = p(B) \cdot p(A/B)$, откуда $p(A/B) = p(A)$. Значит, **свойство независимости событий взаимно**.

**Теорема умножения для независимых событий имеет вид**:

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, то есть вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

При решении задач теоремы сложения и умножения обычно применяются вместе.

Пример. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятности следующих событий:

$A$ – хотя бы одно попадание при двух выстрелах;
$B$ – ровно одно попадание при двух выстрелах;
$C$ – два попадания;
$D$ – ни одного попадания.

Решение. Пусть событие $H_1$ – попадание первого стрелка, $H_2$ – попадание второго. Тогда $A = H_1 + H_2$, $B = H_1 \cdot \overline{H}_2 + \overline{H}_1 \cdot H_2$, $C = H_1 \cdot H_2$, $D = \overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2$. События $H_1$ и $H_2$ совместны и независимы, поэтому теорема сложения применяется в общем виде, а теорема умножения – в виде (2.8). Следовательно, $P(C) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$, $P(A) = 0,6 + 0,7 – 0,42 = 0,88$, $P(B) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,46$ (так как события $H_1 \cdot \overline{H}_2$ и $\overline{H}_1 \cdot H_2$ несовместны), $P(D) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$. Заметим, что события $A$ и $D$ являются противоположными, поэтому $P(A) = 1 – P(D)$.

## 4. Основные формулы комбинаторики.

При вычислении вероятностей часто приходится использовать некоторые формулы *комбинаторики* – науки, изучающей комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов некоторого конечного множества. Определим основные такие комбинации.

Определение 1.10. **Перестановки** – это комбинации, составленные из всех $n$ элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n! \qquad (1.3)$$

Пример. Сколько различных списков (отличающихся порядком фамилий) можно составить из 7 различных фамилий?

Решение. $P_7 = 7! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Определение 1.11. **Размещения** – комбинации из $m$ элементов множества, содержащего $n$ различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1). \qquad (1.4)$$

Пример. Сколько возможно различных вариантов пьедестала почета (первое, второе, третье места), если в соревнованиях принимают участие 10 человек?

Решение. $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$

Определение 1.12. **Сочетания** – неупорядоченные наборы из $m$ элементов множества, содержащего $n$ различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов). Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.5)$$

Пример. В отборочных соревнованиях принимают участие 10 человек, из которых в финал выходят трое. Сколько может быть различных троек финалистов?

Решение. В отличие от предыдущего примера, здесь не важен порядок финалистов, следовательно, ищем число сочетаний из 10 по 3:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120.$$

**Задание 2. Приведите по 2 примера:**

1) достоверных событий;
2) невозможных событий;
3) случайных событий.

**Задание 3. Решите задачи.**

1. В партии из 100 деталей имеется 5 бракованных. Определить вероятность того, что, взятая наугад, деталь окажется стандартной.
2. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово «книга».
3. В урне лежат 20 одинаковых на ощупь шаров: 12 белых и 8 черных. Какова вероятность вынуть наудачу два белых шара?
4. В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.
5. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему три вопроса?

**Выполненные Задания 2 и 3 отправляются на проверку преподавателю Кузнецовой Л.В. на адрес: ludmilakuz30@gmail.com**