

## Инструкционная карта по выполнению практических занятий № 31

по предмету Математика

**Наименование работы:** Теорема Ньютона-Лейбница. Применение интеграла к вычислению площадей.

**Цели занятия:**

- 1) образовательная: отработать навыки по применению формулы Ньютона - Лейбница и по применению определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур;
- 2) развивающая: содействовать развитию умений применять полученные знания на практике;
- 3) воспитательная: обеспечить условия для воспитания положительного интереса к математике.

**Материалы и оборудование:** инструкционная карта.

**Норма времени:** 2 часа.

**Содержание практического занятия.**

### 1 вариант

**Задание 1.** Вычислите определенные интегралы.

- 1)  $\int_{-1}^2 x^4 dx$
- 2)  $\int_2^3 (2x - 1) dx$
- 3)  $\int_1^2 (3 - x^2) dx$
- 4)  $\int_0^3 (x^2 - 4x + 4) dx$
- 5)  $\int_0^1 (5x^4 - 8x^3) dx$

**Задание 2.** Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

- 1)  $y = 4 - x^2, y = 0$
- 2)  $y = x^3, y = 0, x = -3, x = 1$
- 3)  $y = x^2 + 2, y = 2x + 2$

**Методические указания.**

1. При решении задач можно пользоваться конспектами лекций по данным темам.
2. Основные формулы интегрирования.

- 1)  $\int dx = x + C$
- 2)  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
- 3)  $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
- 4)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- 5)  $\int e^x dx = e^x + C$
- 6)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- 7)  $\int \cos x dx = \sin x + C$
- 8)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
- 9)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

3. Формула Ньютона - Лейбница:  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

**Примеры:**  $1 \int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{3^3 - 2^3}{3} = \frac{27 - 8}{3} = \frac{19}{3} = 6 \frac{1}{3}$

$$2) \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \int_{-1}^2 x^2 dx + 2 \int_{-1}^2 x dx + 1 \int_{-1}^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 + \frac{2 \cdot x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + x \Big|_{-1}^2 = \frac{2^3 - (-1)^3}{3} + (2^2 - (-1)^2) + (2 - (-1)) = \frac{8 + 1}{3} + (4 - 1) + (2 + 1) = \frac{9}{3} + 3 + 3 = 3 + 3 + 3 = 9$$

#### 4. Алгоритм решения Задания 2.

- 1) Построить график или графики заданных функций. Заштриховать фигуру, площадь которой требуется найти.
- 2) Определить расположение построенной фигуры и найти её площадь по соответствующей формуле.

Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = -x^2 + 9$  и  $y = 0$ .

Решение:

1) Построим график функции  $y = -x^2 + 9$ . Данная функция является квадратичной, графиком её является парабола.

а) Сначала найдём координаты вершины параболы по формулам:

$x_{\text{в}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot (-1)} = 0$ ,  $y_{\text{в}}(0) = -0^2 + 9 = 0 + 9 = 9$ . Таким образом вершина параболы имеет следующие координаты  $(0; 9)$ .

б) Найдём точки пересечения графика с осями координат; для этого правую часть функции приравняем к 0 и решим неполное квадратное уравнение:

$$-x^2 + 9 = 0$$

$$-x^2 = -9$$

$$x^2 = -9: (-1)$$

$$x^2 = 9$$

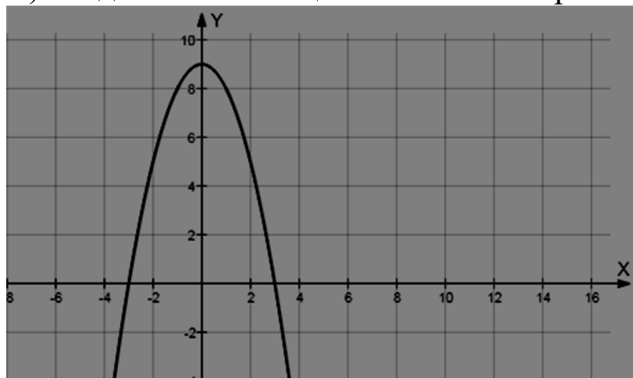
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{9}$$

$x_1 = -3$ ,  $x_2 = 3$ . Из этого следует, что график функции  $y = -x^2 + 9$  пересекает ось  $Ox$  в точках с координатами:  $(-3; 0)$  и  $(3; 0)$ . Тем более, найденные значения  $x_1 = -3$  и  $x_2 = 3$  будут являться пределами интегрирования, т.е.  $a = -3$  и  $b = 3$ .

в) Зададим таблицу значений для семи точек:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	0	5	8	9	8	5	0

г) По данным таблицы значений построим график функции:



Заштрихуем фигуру, площадь которой надо найти.

2) Фигура лежит выше оси  $Ox$ , поэтому её площадь найдём по формуле:  $S = \int_a^b f(x) dx$ .

$$S = \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx = - \int_{-3}^3 x^2 dx + 9 \int_{-3}^3 dx = \frac{-x^3}{3} \Big|_{-3}^3 + 9x \Big|_{-3}^3 = \frac{3^3 - (-3^3)}{3} + 9 \cdot (3 - (-3)) =$$
$$= \frac{27 - (-27)}{3} + 9 \cdot (3 + 3) = \frac{-27 + 27}{3} + 9 \cdot 6 = \frac{-54}{3} + 54 = -18 + 54 = 36 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: 36 кв. ед.

### **Контрольные вопросы.**

1. Дайте определение определённого интеграла. Сформулируйте теорему Ньютона - Лейбница.
2. По какому алгоритму вычисляется определенный интеграл?
3. В чём заключается геометрический смысл определённого интеграла?

### **Отчёт по ПЗ № 31**

1. Сделайте вывод по проделанной работе (что узнали нового, чему научились и т. п.)
2. **Выполненное ПЗ № 31 отправляется на проверку преподавателю Кузнецовой Л.В. на адрес: [ludmilakuz30@gmail.com](mailto:ludmilakuz30@gmail.com)**