

Урок № 81

Тема: Вторая производная, её геометрический и физический смысл.

Задание 1. Ознакомьтесь с теоретическим материалом по теме урока и кратко его законспектируйте по плану:

1. Вторая производная: определение и физический смысл.
2. применение второй производной к исследованию функций.

Лекция.

1. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то её производная называется второй производной функции $f(x)$ в точке x_0 , и обозначается $f''(x_0)$. Проще говоря, **вторая производная — это производная от первой производной.**

Задание Найти производную второго порядка функции $y = x^3 - 4x + 13$

Для того чтобы найти вторую производную, вначале надо найти производную первого порядка: $y' = (x^3 - 4x + 13)'$

Согласно свойству линейности, имеем:

Решение $y' = (x^3)' - 4 \cdot (x)' + (13)' = 3x^2 - 4 \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 4$

Тогда искомая вторая

производная: $y'' = (y')' = (3x^2 - 4)' = 3 \cdot (x^2)' - (4)' = 3 \cdot 2x - 0 = 6x$

Ответ $y'' = 6x$

Физический смысл производной второго порядка: Пусть тело движется прямолинейно по некоторому закону s . Тогда **вторая производная от пути по времени есть ускорение прямолинейного движения** в данный момент времени: $a = s''$ или $a = v' = s''$.

ПРИМЕР. Прямолинейное движение точки совершается по закону: $s = (t^3 - 2)$ м.

Определить ускорение в момент $t = 10$ сек.

Решение. Ускорение $a = s''$.

$$a = ((t^3 - 2)')' = (3t^2 - 0)' = 6t$$

Следовательно, $a(10) = 6t = 6 \cdot 10 = 60$; $a = 60$ м/сек².

Ответ: 60 м/сек².

2. Вторая производная $f''(x)$ имеет также важное значение в анализе и в геометрии; в самом деле, представляя собой скорость изменения наклона $f'(x)$ кривой $y = f(x)$, вторая производная дает указание на то, как изогнута кривая.

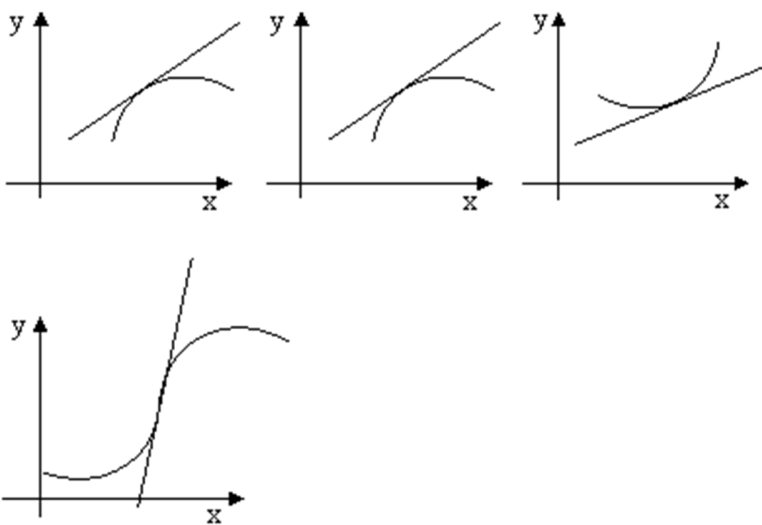
Функция $f(x)$ называется **выпуклой** на интервале (a, b) , если её график на этом интервале лежит *ниже* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$. Функция $f(x)$ называется **вогнутой** на интервале (a, b) , если её график на этом интервале лежит *выше* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$.

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) функции.

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема (имеет *вторую* производную) на интервале (a, b) , тогда:

- 1) если $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ является **вогнутой** на интервале (a, b) ;
- 2) если $f''(x) < 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ является **выпуклой** на интервале (a, b) .

Точка, при переходе через которую функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется **точкой перегиба**. Отсюда следует, что если в точке перегиба x_0 существует вторая производная $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.



Правило нахождения точек перегиба графика функции $y=f(x)$

- 1) Найти вторую производную f'' .
- 2) Найти точки, в которых вторая производная f'' обращается в нуль или терпит разрыв.
- 3) Исследовать знак второй производной f'' на каждом промежутке, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба графика функции.
- 4) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Общая схема для построения графиков функций

ПРИМЕР: Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $f(x)=6x^2-x^3$.

Решение:

1. Находим $f'(x)=(6x^2-x^3)'=12x-3x^2$, $f''(x)=(12x-3x^2)'=12-6x$.

2. Найдем критические точки по второй производной, решив уравнение: $12-6x=0$, $x=2$

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	∪	точка перегиба	∩

4. $f(2)=6 \cdot 2^2 - 2^3 = 16$

Ответ: Функция выпукла вверх при $x \in (2; +\infty)$; функция выпукла вниз при $x \in (-\infty; 2)$; точка перегиба $(2; 16)$.

Задание 2. Найдите точки перегиба следующих кривых.

1) $f(x) = x^3 - x$

2) $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 100$

3) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$

Выполненные задания отправляются на проверку преподавателю Кузнецовой Л.В. на адрес: ludmilakuz30@gmail.com